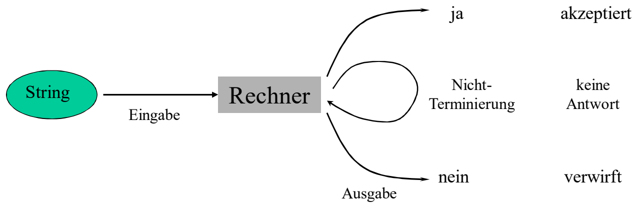
„Rechnen“ : automatisches Manipulieren von Zeichenketten(Strings)



Vereinfachtes Rechenmodell:

Rechner akzeptiert/verwirft Eingabestring, oder
terminiert nicht (gibt keine Antwort)

{vom Rechner akzeptierten Strings} = vom Rechner akzeptierte „Sprache“

Kann jede Sprache von irgendeinem Rechner akzeptiert werden?

Was sind minimale „Rechenressourcen“, um eine Sprache zu akzeptieren?

Naive Mengenlehre, Wiederholung

Folgende Symbole werden als bekannt vorausgesetzt:

$\in \quad \subset \quad \subseteq \quad \subsetneq \quad \cup \quad \cap \quad \setminus \quad \emptyset \quad \times \quad \{ \ \}$

$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C}$

A, B seien Mengen, $k \in \mathbb{N}$ — A,B endlich

$\binom{A}{k} = \{ X \subseteq A : |X| = k \}$ — $\left| \binom{A}{k} \right| = \binom{|A|}{k}$

$2^A = \{ X : X \subseteq A \}$ — $|2^A| = 2^{|A|}$

Potenzmenge

$B^A = \{ f : A \to B \}$ — $|B^A| = |B|^{|A|}$

Funktionenmenge

$R \subseteq A \times B$ Relation zwischen A und B

$R \subseteq A \times A$ Relation auf A

$a \ R \ b$ Infixnotation für $(a,b) \in R$

R reflexiv: $\forall a \in A: (a,a) \in R$

R symmetrisch: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$

R transitiv: $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

R Äquivalenzrelation: R reflexiv, symmetrisch und transitiv

$f : A \to B$ Funktion von A nach B

f ist Relation zwischen A und B mit

$\forall a \in A \ \exists$ genau ein $b \in B$ mit $(a,\underbrace{b}_{f(a)}) \in f$

$f : A \to B$ partielle Funktion von A nach B

$\forall a \in A \ \exists$ höchstens ein $b \in B$ mit $(a,b) \in f$

A, B Mengen, $f: A \to B$, R_f Relation auf A

$R_f = \{ (x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y) \}$

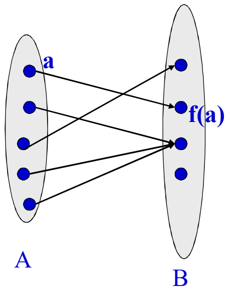
Satz: 1) R_f ist auf jeden Fall eine Äquivalenzrelation auf A
2) R Äquivalenzrelation auf A $\Rightarrow$ $\exists f: A \to A$ mit $R = R_f$

Funktion $f{:}A \to B$

f injektiv: $\forall\, a,b \in A,\ a \neq b : f(a) \neq f(b)$

f surjektiv: $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A{:}\ b = f(a)$

f bijektiv: f ist injektiv und auch surjektiv



f Funktion: in jedem $a \in A$ beginnt ein Pfeil

f Injektion: in jedem $b \in B$ endet höchstens ein Pfeil

f Surjektion: in jedem $b \in B$ endet mindestens ein Pfeil

f Bijektion: in jedem $b \in B$ endet genau ein Pfeil

Satz: $\exists$ Surjektion $f{:}A \to B \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ Injektion $g{:}B \to A$

Satz: $\left.\begin{array}{l}\exists \text{ Surjektion } f{:}A \to B \\ \exists \text{ Injektion } g{:}A \to B\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ Bijektion $h{:}A \to B$

Nicht offensichtlich !!

A ... Menge $\quad |A|$ Mächtigkeit (Kardinalität) von A

Definition: $|A| \geq |B|$ $\exists$ Surjektion von A nach B
($\exists$ Injektion von B nach A)
A mindestens so mächtig wie B

$|A| \leq |B|$ $\exists$ Injektion von A nach B
($\exists$ Surjektion von B nach A)
A höchstens so mächtig wie B

$|A| = |B|$ wenn $|A| \leq |B|$ und $|A| \geq |B|$
($\exists$ Bijektion zwischen A und B)
A gleichmächtig wie B

Definition: Menge A endlich ... $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $|A| = |\{1,2,\cdots,n\}|$
in diesem Fall $|A| = n$

Satz: Jede Menge A ist **nicht** mindestens so mächtig wie ihre Potenzmenge 2^A.

2^A ist mächtiger als A es gibt keine Surjektion $A \to 2^A$

Beweis: $h : A \to 2^A$, müssen zeigen, dass h keine Surjektion,
d.h. müssen ein $\Delta_h \in 2^A$ finden, sodass $\forall\, a \in A{:}\ h(a) \neq \Delta_h$

Verwende $\Delta_h = \{\, a \in A \mid a \notin h(a) \,\}$

Für jedes $a \in A$ unterscheiden sich $h(a)$ und Δ_h in a

Daraus folgt, es gibt verschiedene Unendlichkeiten:

$2^{\mathbb{N}}$ "unendlicher" als $\mathbb{N}$

$2^{2^{\mathbb{N}}}$ "noch unendlicher" u.s.f.