Aufgabe 1

(a) **Hilfslemma:** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^n$ ist abzählbar. **Beweis** durch vollständige Induktion.

- *Induktionsanfang*: die zwei Mengen $\mathbb{N}^0$ (die Menge, die nur die leere Folge enthält) und $\mathbb{N}^1$ sind offensichtlich abzählbar.
- *Induktionsvoraussetzung*: $\mathbb{N}^k$ ist abzählbar.
- *Induktionsschritt*: $\mathbb{N}^{(k+1)} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$. Das Kreuzprodukt von zwei abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar (mit dem *Cantor'schen Diagonalverfahren*).

Die Menge $\mathbb{N}^*$ ist die Vereinigung von abzählbar vielen *abzählbaren* (siehe obiges Lemma) Mengen: $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in N} \mathbb{N}^k$. Daher ist auch $\mathbb{N}^*$ abzählbar (siehe Aufgabe 1.7).

(b) Nennen wir f die gesuchte Bijektion.

Sei $p = p_0, p_1, p_2, \ldots$ die unendliche aufsteigende Folge aller Primzahlen d.h. $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

Laut dem *Fundamentalsatz der Arithmetik*, besitzt jede positive natürliche Zahl eine (bis auf Permutationen) *eindeutige* Primfaktorenzerlegung, d.h., zu jeder positiven natürlichen Zahl n gibt es *genau eine* Zahl $m \in \mathbb{N}$ und *eindeutige* $k_0, k_1, \ldots k_{m-1} \in \mathbb{N}$, so dass $k_{m-1} \neq 0$ und $n = {p_0}^{k_0} \cdot {p_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot {p_{m-1}}^{k_{m-1}}$.

Eine Idee wäre also, jede natürliche Zahl n auf die endliche Folge $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ abzubilden.

Die obige Idee bereitet uns zwei technische Schwierigkeiten:

- Erstens, die Null besitzt keine Primfaktorenzerlegung.
- Zweitens, die Abbildung f ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv. Denn alle endliche Folgen, die mit mindestens einer Null aufhören, werden nicht abgedeckt.

Um die erste Schwierigkeit zu beheben, führen wir die Primfaktorenzerlegung auf $(n+1)$, statt auf n.

Um auch die Folgen, die auf eine Null enden, abzudecken, machen wir nun Folgendes: n wird auf die Folge, die aus der Konkatenation der zwei Folgen

$$k_1, \ldots, k_{m-1}$$

und

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k_0-\text{mal}}$$

besteht, abgebildet, d.h.

$$f(n) = k_1, \ldots, k_{m-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k_0-\text{mal}}$$

wobei $p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{k_{m-1}} = n + 1$ und $k_{m-1} \neq 0$.

Ende der Konstruktion.

Aufgabe 2

(a) Sei $F = \{f \mid f \text{ ist monoton fallende Funktion}\}$ die Menge all solcher monoton fallenden Funktionen. Wir wollen zeigen, dass F abzählbar ist. Da $(\mathbb{N}, >)$ wohlfundiert ist, kann eine Funktion aus F nur endlich oft *echt* absteigen. D.h. jede solche Funktion f ist ab einer gewissen Stelle $k \in \mathbb{N}$ konstant ($f(n) = f(k) \, \forall n > k$). Wir können F daher darstellen als $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$. F_k bezeichne hierbei die Menge aller ab der Stelle k konstanten Funktionen.

Wir zeigen nun, dass F_k für jedes k abzählbar ist.
Sei hierzu

$$h : F_k \to \mathbb{N}^{k+1}, h(f) = (f(0), ..., f(k)).$$

Diese Funktion h ist injektiv, denn für $f, g \in F_k$ gilt:

$$(f(0), ..., f(k)) = h(f) = h(g) = (g(0), ..., g(k)) \Rightarrow f(n) = g(n) \, \forall 0 \leq n \leq k.$$

Weiter gilt: $\forall n > k : f(n) = f(k) = g(k) = g(n)$.
Insgesamt erhalten wir also $f(n) = g(n)\, \forall n \in \mathbb{N}$ und somit $f = g$.
Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist

$$i : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}, i(n_0, ..., n_k) = p_0^{n_0} \cdot ... \cdot p_k^{n_k},$$

mit $p_0, ..., p_k$ paarweise verschiedenen Primzahlen, injektiv.
Also ergibt sich $|F_k| \leq |\mathbb{N}^{k+1}| \leq \mathbb{N}$ und somit ist F_k abzählbar. Nun ist $F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen nach Aufgabe 1.7 wiederum abzählbar.

(b) Sei $S = \{f \mid f$ ist monoton steigende Funktion$\}$ die Menge all solcher monoton steigenden Funktionen. Wir wollen zeigen, dass S nicht abzählbar ist. Dazu konstruieren wir eine surjektive Funktion h:

$$h : S \to 2^{\mathbb{N}}, h(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f(n + 1)\}$$

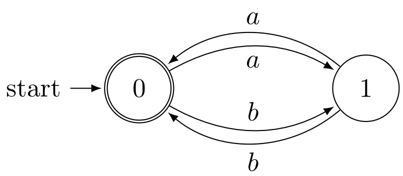
Z.z. h surjektiv.
Sei also $A \subseteq \mathbb{N}$ und f rekursiv definiert als

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1), & \text{falls } 0 \leq (n-1) \in A \\ f(n-1) + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt: $h(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f(n + 1)\} \overset{k:=n+1}{=} \{k - 1 \in \mathbb{N} \mid f(k - 1) = f(k)\} = A$ nach Konstruktion von f. Somit ist f Urbild von A.
Insgesamt ergibt sich: $|S| \geq |2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$. S ist also überabzählbar.

Aufgabe 3

(a) Folgender DEA erkennt L_1. Der Zustand x steht hierbei für $x = \#_a(w) + \#_b(w) \bmod 2$.



(b) Ein Automat, der die Sprache $L_{k,l}$ erkennt, ist gegeben durch das Quintupel $(\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit:
$Q = \{q_{i,j} \mid 0 \leq i < k \wedge 0 \leq j < l\}$
$s = q_{0,0}$
$F = \{q_{i,j} \mid i \neq j,\ 0 \leq i < k,\ 0 \leq j < l\}$
$\Delta = \{(q_{i,j}, a, q_{n,j}) \mid q_{i,j} \in Q \wedge n = i + 1 \bmod k\} \cup \{(q_{i,j}, b, q_{i,n}) \mid q_{i,j} \in Q \wedge n = j + 1 \bmod l\}$
Der Zustand $q_{i,j}$ steht hierbei für $\#_a(w) \bmod k = i$ und $\#_b(w) \bmod l = j$.

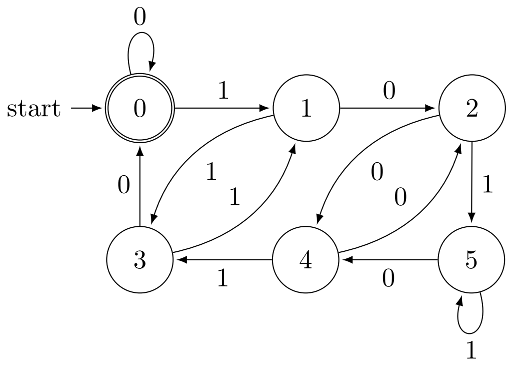
(c) Betrachte $w_n = a^n$. Für $n \neq m$ gilt: $b^n \in F_L(w_n)$, da $w_n b^n = a^n b^n \in L_3$.
Aber $b^n \notin F_L(w_m)$, denn $w_m b^n = a^m b^n \notin L_3$.
Damit existieren unendlich viele Fortsetzungssprachen. Also ist L_3 nicht regulär. $\square$

Aufgabe 4

Ein Automat, der die Sprache S erkennt, ist gegeben durch das Quintupel $(\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit:
$\Sigma = \{a\}$
$Q = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 1600\} \cup \{p_i \mid 0 \leq i < 400\}$
$s = q_0$
$F = \{p_i \mid ((4 \mid i \wedge 100 \nmid i) \vee 400 \mid i)\}$
$\Delta = \{(q_i, a, q_{i+1}) \mid 0 \leq i < 1600\} \cup \{(q_{1600}, a, p_1)\} \cup \{(p_i, a, p_{i+1 \bmod 400}) \mid 0 \leq i < 400\}$

Aufgabe 5

(a) Die Sprache ist eine DEA-Sprache, denn folgender Automat erkennt L_4:



(b) Definiere für gerades $n \geq 2 : w_n := 10^{n-2}1$. Sei x die kleinste Binärzahl ungerader Länge, sodass $w_n x \in L_5$.
Wegen $|0^{n-2}1x|$ gerade, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\langle 10^{n-2}1x \rangle = 2^{2k} + a$, wobei $a = \langle 1x \rangle > 0$.
Da a minimal gilt:

$$
\begin{aligned}
&2^{2k} + a = (2^k + 1)^2 = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow a = 2^{k+1} + 1 \text{ und } x = 0^k 1 \\
&\Rightarrow 2^{n+k} + 2^{k+1} + 1 = \langle 10^{n-2}10^k1 \rangle = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow n = k \text{ und } x = 0^n 1
\end{aligned}
$$

Damit ist $x = 0^n1$ das kleinste Element in $F_{L_5}(w_n)$ mit ungerader Länge. Also gibt es unendlich viele Fortsetzungssprachen und L_5 ist nicht regulär. $\square$