Aufgabe 1

Sei $A \neq \emptyset$ und sei $x \in A$. Nach Definition der *Antisymmetrie* in der Aufgabenstellung, müsste insbesondere auch $(x,x) \in R \Leftrightarrow (x,x) \notin R$, damit R antisymmetrisch ist. Dies ist offensichtlich kontradiktorisch. Somit führt die Definition aus der Aufgabenstellung für alle Mengen M mit $M \neq \emptyset$ zu einem Widerspruch.

Somit ist die Definition $\forall a, a' \in A. (a,a') \in R \wedge (a,a') \in R \Rightarrow a = a'$ sinnvoller, da so im Fall, dass a und a' gleich sind, die Definition nicht zu einem Widerspruch führt.

Aufgabe 2

Im Allgemeinen ist die zu beweisende Aussage falsch: Sei $\mathcal{A}$ die leere Menge und $\mathcal{B} = \{1\}$. In dem Fall ist die leere Funktion eine Injektion von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Es existiert jedoch keine Surjektion von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$, da es kein Element in der Zielmenge gibt, Surjektionen unserer Definition zufolge jedoch immer (totale) Funktionen sind. Lässt man für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die leere Menge nicht zu, so gilt die Aussage jedoch:

"$\Rightarrow$" Sei f eine Injektion von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. In diesem Fall gilt: $\forall a, a \in \mathcal{A} : a \neq a \ \rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Zu zeigen: Es existiert eine Funktion f' von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$, sodass $\forall a \in \mathcal{A} : \exists b \in \mathcal{B} : f'(b) = a$. Da $\mathcal{A}$ nicht die leere Menge ist, existiert ein $\dot{a} \in \mathcal{A}$. Sei f' wie folgt definiert:

$$f'(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{falls ein } a \in \mathcal{A} \text{ existiert, sodass } f(a) = b \\ \dot{a} & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt, dass für ein $a \in \mathcal{A}$ das Objekt $f(a) \in \mathcal{B}$ existiert, sodass $f'(f(a)) = a$. Es bleibt lediglich noch zu zeigen, dass f' tatsächlich eine (totale) Funktion ist.

Wohldefiniertheit (Funktionalität): Beweis durch Widerspruch:

Fall 1: $f'(b) = a \wedge f'(b) = a' \wedge a \neq a'$: Also: $f(a) = b$ und $f(a') = b$. In diesem Fall, gilt nach Injektivität von f: $a = a'$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $a \neq a'$.

Fall 2: $f'(b) = \dot{a}$: In diesem Fall ist Funktionalität klar.

"$\Leftarrow$" Sei f' eine Surjektion von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$. Dann gilt: $\forall a \in \mathcal{A} : \exists b \in \mathcal{B} : f'(b) = a$.

Zu zeigen: $\exists f : \forall a, a' : a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$. Sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Nun existiert mindestens ein $b \in \mathcal{B}$, sodass $f'(b) = a$. Sei nun $f(a) = b$. Somit haben wir eine Funktion f gefunden. Es bleibt zu zeigen, dass sie die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Für a, a' mit $a \neq a'$ und $f(a) = b$ und $f(a') = b'$ wissen wir nach Definition von f: $f'(b) = a \wedge f'(b') = a'$. Da f' eine Funktion ist, müsste im Fall $b = b'$gelten: $a = a'$. Dies ist jedoch falsch. Daher gilt $b \neq b'$ und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe 3

1. **"$\leq$" ist transitiv:**

   Seien A, B, C Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$. Per Definition gibt es also zwei Injektionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$. Wir müssen nun eine Injektion $h : A \rightarrow C$ finden. Wähle $h := g \circ f$, d.h. $h(a) := g(f(a))$.
   h ist injektiv:
   Seien $a_1, a_2 \in A$ beliebig mit $a_1 \neq a_2$. Dann gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$, da f injektiv ist. $f(a_1)$ und $f(a_2)$ sind Elemente von B, daher folgt $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ aus der Injektivität von g. Per Definition von h ist also $h(a_1) \neq h(a_2)$, was die Injektivität von h beweist, und damit $|A| \leq |C|$ zeigt. Also ist "$\leq$" auf Mächtigkeiten von Mengen transitiv.

2. **"$\geq$" ist transitiv:**

   Seien A, B, C Mengen mit $|A| \geq |B|$ und $|B| \geq |C|$. Per Definition gibt es also zwei Surjektionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$. Wir müssen nun eine Surjektion $h : A \rightarrow C$ finden. Wähle $h := g \circ f$, d.h. $h(a) := g(f(a))$.
   h ist surjektiv:

Sei $c \in C$ beliebig. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$, da g surjektiv ist. Für ein solches b gibt es wiederum ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, da f surjektiv ist. Für ein solches a gilt dann also $h(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Also ist h surjektiv und somit $|A| \geq |C|$. Also ist "$\geq$" auf Mächtigkeiten von Mengen transitiv.

Bemerkung: Alternativ kann man die Transitivität von nur einer Relation beweisen, und die der jeweils anderen mithilfe von $|A| \leq |B| \iff |B| \geq |A|$ (Aufgabe 1.2) folgern.

Aufgabe 4

Zu zeigen ist: "$=$" auf Mächtigkeiten von Mengen ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

1. **Reflexivität:**

   Sei A eine Menge. Wir müssen eine Bijektion $f : A \to A$ angeben: Wähle $f = id$ die Identität. Diese ist offensichtlich bijektiv. Also gilt $|A| = |A|$.

2. **Transitivität:**

   Seien A, B, C Mengen mit $|A| = |B|$ und $|B| = |C|$. Per Definition gibt es also zwei Bijektionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Wir müssen nun eine Bijektion $h : A \to C$ finden. Wähle $h := g \circ f$. Da f und g injektiv und surjektiv sind, folgt mit den Beweisen aus Aufgabe 1.3, dass auch h injektiv und surjektiv ist, also bijektiv. Also gilt $|A| = |C|$.

3. **Symmetrie:**

   Seien A, B Mengen mit $|A| = |B|$. Per Definition gibt es also eine Bijektion $f : A \to B$. Bijektionen sind umkehrbar, d.h. die Funktion $f^{-1} : B \to A$ ist wohldefiniert und ebenfalls eine Bijektion. Somit gilt $|B| = |A|$.

Aufgabe 5

Für endliche Mengen A und B gilt laut Vorlesung, dass $|B^A| = |B|^{|A|}$. Wir müssen jedoch auch unendliche Mengen betrachten. Fallunterscheidung über die Kardinalitäten von A und B:

1. $|A| = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$ und somit

$$\begin{aligned} |B^A| &= |\{f \mid f : A \to B \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\{f \mid f : \emptyset \to B \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\{f \mid f = \emptyset\}| \\ &= |\{\emptyset\}| \\ &= 1 \\ &> |A| \end{aligned}$$

2. $|A| > 0 \wedge |B| = 0$: Dann gilt $A \neq \emptyset$ und $B = \emptyset$ und somit

$$\begin{aligned} |B^A| &= |\{f \mid f : A \to B \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\{f \mid f : A \to \emptyset \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\emptyset| \\ &= 0 \\ &\leq |A| \end{aligned}$$

3. $|A| > 0 \wedge |B| = 1$: Dann gilt $A \neq \emptyset$ und $B = \{b\}$ ist einelementig. Somit folgt

$$\begin{aligned}|B^A| &= |\{f \mid f : A \to \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\{f \mid f : A \to \{b\} \text{ ist eine Funktion}\}| \\ &= |\{b\}| \\ &= 1 \\ &\leq |A|\end{aligned}$$

4. A und B endlich und $|B| > 1$: Dann gilt $|B^A| = |B|^{|A|} > |A|$.
5. A endlich, $|A| > 0$ und B unendlich: Offensichtlich gilt $|B^A| > |A|$.
6. A unendlich und $|B| > 1$: Falls $|B^A| \leq |A|$ gilt, gibt es eine Surjektion von A nach B^A . Sei $f : A \to B^A$ eine beliebige Funktion. Wir müssen zeigen, dass f nicht surjektiv ist. Da $|B| > 1$ nach Annahme, können wir eine Funktion $g : B \to B$ definieren, sodass $\forall b \in B.g(b) \neq b$. Sei $h : A \to B$ definiert als $h(a) = g((f(a))(a))$. Dies ist möglich, da $f(a)$ nach Konstruktion eine Funktion von A nach B ist. Da $g((f(a))(a)) \neq (f(a))(a)$ nach Konstruktion von g, gilt $h \neq f(a)$ für alle $a \in A$. Somit ist f nicht surjektiv.

Aufgabe 6

Die Aussage trifft genau für alle endlichen Mengen A zu: Es ist

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X \subseteq A \mid |X| = k\} = \{X \subseteq A \mid X \text{ ist endlich}\}$$

die Menge aller *endlichen* Teilmengen von A. Hingegen ist

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

die Potenzmenge, also die Menge *aller* Teilmengen von A.

Falls A endlich ist, sind auch alle Teilmengen von A endlich, die Gleichheit gilt also. Falls A jedoch unendlich ist, enthält 2^A auch unendliche Teilmengen von A (z.B. A selbst), die Gleichheit gilt also nicht.
Formal:

1. A endlich:

   "$\subseteq$" Sei $T \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $T \in \binom{A}{k} = \{X \subseteq A \mid |X| = k\}$.
   Also ist $T \subseteq A$ und damit $T \in \{X \mid X \subseteq A\} = 2^A$.

   "$\supseteq$" Sei $T \in 2^A$, also $T \subseteq A$. Da A endlich ist, ist auch jede Teilmenge von A endlich. Also auch T: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $|T| = k$. Damit ist $T \in \binom{A}{k}$ per Definition. Insbesondere ist dann $T \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k}$.

   $\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} = 2^A$.

2. A unendlich: Es ist $A \subseteq A$, also $A \in 2^A$. Wäre $A \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X \subseteq A \mid |X| = k\}$, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|\mathbb{N}| = k$. Das ist aber offensichtlich nicht der Fall. Daher ist $A \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k}$.
   $\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} \neq 2^A$.

Aufgabe 7

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Mengen S_i abzählbar *unendlich* sind. In diesem Fall gibt es eine Bijektion $S_i(n) : \mathbb{N} \to S_i$. Wenn wir nun für jedes $S_i(n)$ den Wert $x = i + n$ betrachten ist dieser endlich. Insbesondere gibt es deswegen auch nur endlich viele Kombinationen aus i und n, die zum selben Wert von x führen. Diese endlichen Mengen lassen sich nun nach der Größe von x ordnen. Innerhalb von gleichen x-Werten kann man nach der lexikalischen Ordnung von (i, j) ordnen. Insgesamt ergibt sich die lexikalische Ordnung von (x, i, n). Die explizite Surjektion von $\mathbb{N}$ nach $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ sieht wie folgt aus:

$$f(0) = S_0(0)$$

$$f(n) = \begin{cases} S_0(i+1) & \text{wenn } f(n-1) = S_i(0) \\ S_{i+1}(j-1) & \text{sonst, mit } f(n-1) = S_i(j) \end{cases} \qquad n \neq 0$$

Der Beweis, dass f tatsächlich surjektiv ist, erfolgt mittels wohlfundierter Induktion über der lexikalischen Ordnung auf (x, i, j) mit $x = i + j$. Diese Ordnung ist wohlfundiert, da für jede Teilmenge $\mathcal{X}$ von $\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid x = i + j\}$ ein minimales Element bezüglich dieser Ordnung existiert. Da $\mathbb{N}$ wohlfundiert ist, existiert ein minimales $x \in \{x \mid \exists i, j \in \mathbb{N} : (x, i, j) \in \mathcal{X}\}$. Ebenso existiert aufgrund der Wohlfundiertheit von $\mathbb{N}$ ein minimales $i \in \{i \mid \exists j \in \mathbb{N} : (x, i, j) \in \mathcal{X}\}$. Daher ist $(x, i, x - i)$ ein minimales Element von $\mathcal{X}$

Zu zeigen: $\forall i, j : \exists n : f(n) = S_i(j)$. Seien $i, j \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: $\forall i', j' \in \mathbb{N} : (i' + j', i', j')$ lexikalisch kleiner als $(i + j, i, j) \to \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = S_{i'}(j')$
Beweis durch Fallunterscheidung über i, j.

Fall 1: $i, j = 0$. In diesem Fall ist $n = 0$, denn $f(0) = S_0(0)$.

Fall 2: $i = 0$ und $j > 0$. In diesem Fall existiert nach Induktionsannahme ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = S_{j-1}(0)$. Nach der Definition von f , folgt, dass $f(n + 1) = S_0(j)$

Fall 3: $i > 0$. In diesem Fall existiert nach Induktionsannahme ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = S_{i-1}(j + 1)$. Nach Definition von f folgt in diesem Fall, dass $f(n + 1) = S_i(j)$.

Aufgabe 8

Sei M die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die nicht im Bild von f sind, sei also $M = \{A \mid \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \neq A\}$. Wir wollen zeigen, dass M überabzählbar ist. Beweis durch Widerspruch. *Annahme*: M ist abzählbar.

Offensichtlich gilt: $2^{\mathbb{N}} = Im(f) \cup M$. Da $Im(f)$ und M abzählbar sind, gilt nach Aufgabe 1.7, dass auch $Im(f) \cup M$ abzählbar ist. Wir wissen aber, dass $2^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar ist. Dies ist ein Widerspruch und daher ist M überabzählbar.

Aufgabe 9

"$\Rightarrow$" Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Wir wollen eine bijektive Funktion $h : A \to B$ konstruieren. Zunächst konstruieren wir (potentiell unendliche) Sequenzen von Elementen aus A und B, die mit f und g verbunden werden können:

$$\ldots a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_2 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} a_3 \xrightarrow{f} b_3 \ldots$$

Wir können nun folgende Varianten von Sequenzen S haben:

- S ist beidseitig unendlich, d.h. für alle a_i und b_j, die in S vorkommen, gilt $a_i \in Im(g)$ und $b_j \in Im(f)$
- S beginnt in einem Element $a_i \in A$, d.h. $\nexists\, b_j \in B.\ g(b_j) = a_i$ und somit gilt $a_i \in A \setminus Im(g)$
- S beginnt in einem Element $b_i \in B$, d.h. $\nexists\, a_j \in A.\ f(a_j) = b_i$ und somit gilt $b_j \in B \setminus Im(f)$

Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\tilde{A}_0 := A \setminus Im(g), \qquad \tilde{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left((g \circ f)^i \tilde{A}_0 \right)$$

$\tilde{A}$ enthält nun alle Elemente aus A, die in einer Sequenz enthalten sind, die in einem Element aus A beginnt. Wir konstruieren die Funktion h nun wie folgt:

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{falls } a \in \tilde{A} \\ g^{-1}(a) & \text{falls } a \notin \tilde{A} \end{cases}$$

h ist wohldefiniert, weil im Fall $a \notin \tilde{A}$ gilt, dass $a \in Im(g)$ und somit ein $b \in B$ existiert, sodass $g(b) = a$. Wir zeigen nun die Bijektivität von h:

Injektivität: Seien $a, a' \in A$ und es gelte $a \neq a'$. Wir müssen nun zeigen, dass $h(a) \neq h(a')$ gilt. Wir unterscheiden vier Fälle:

(a) $a, a' \in \tilde{A}$:
Dann gilt $h(a) = f(a)$ und $h(a') = f(a')$. Da f nach Annahme injektiv ist, gilt $f(a) \neq f(a')$ und somit auch $h(a) \neq h(a')$.

(b) $a \in \tilde{A} \wedge a' \notin \tilde{A}$:
Dann gilt $h(a) = f(a)$ und $h(a') = g^{-1}(a')$. *Annahme:* $f(a) = g^{-1}(a')$. Da g nach Annahme injektiv ist, muss dann gelten, dass $g(f(a)) = g(g^{-1}(a'))$ und somit dass $(g \circ f)(a) = a'$. Da nach Annahme $a' \notin \tilde{A}$, muss nach Konstruktion von $\tilde{A}$ aber auch $a \notin \tilde{A}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Somit gilt $h(a) \neq h(a')$.

(c) $a \notin \tilde{A} \wedge a' \in \tilde{A}$:
Symmetrisch zu Fall 2.

(d) $a, a' \notin \tilde{A}$:
Dann gilt $h(a) = g^{-1}(a)$ und $h(a') = g^{-1}(a')$. *Annahme:* $g^{-1}(a) = g^{-1}(a')$. Da g nach Annahme injektiv ist, muss dann gelten, dass $g(g^{-1}(a)) = g(g^{-1}(a'))$ und somit dass $a = a'$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Somit gilt $h(a) \neq h(a')$.

Surjektivität: Sei $b \in B$. Wir müssen zeigen, dass $\exists a \in A. h(a) = b$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) b ist in einer Sequenz enthalten, die mit einem Element aus A beginnt. Dann gibt es ein a in dieser Sequenz mit $f(a) = b$. Nach Konstruktion von $\tilde{A}$ muss $a \in \tilde{A}$ gelten. Somit gibt es auch ein $a \in A$ mit $h(a) = b$

(b) b ist in einer Sequenz enthalten, die nicht in einem Element aus A beginnt. Dann gibt es ein a in dieser Sequenz mit $g(a) = b$ und somit ein $a \in A$ mit $h(a) = b$.

"$\Leftarrow$" :

Sei $h : A \to B$ eine Bijektion. Insbesondere ist h also auch injektiv. Da h surjektiv und eine Funktion ist, ist h^{-1} nach Aufgabe 1.2 eine Injektion. Für den Fall, dass A und B die leere Menge sind, gilt, dass die leere Funktion die gesuchte Injektion ist.