1. **(16 Punkte)** Das *allgemeine Hamilton'sche Pfad Problem,* AlHaPf ist wie folgt definiert:

   Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$.

   Frage: Besitzt G einen Hamiltonschen Pfad, also eine Anordnung (Permutation) $x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}$ aller Knoten in V mit $[x_i, x_{i+1}\rangle \in E$ für $1 \leq i < |V|$?

   Das *spezielle Hamilton'sche Pfad Problem,* SpeHaPf ist wie folgt definiert:

   Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei verschieden Knoten $a, b \in V$.

   Frage: Besitzt G einen Hamiltonschen Pfad von a nach b, also eine Anordnung (Permutation) $x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}$ aller Knoten in V mit $x_1 = a$, $x_{|V|} = b$ und $[x_i, x_{i+1}\rangle \in E$ für $1 \leq i < |V|$?

   Zeigen Sie, dass sowohl AlHaPf$\preceq_P$SpeHaPf als auch SpeHaPf$\preceq_P$AlHaPf gilt.

2. **(12 Punkte)** *Ganzzahlige Programmierung* ist das Problem, ob eine gegebene Menge von linearen Ungleichungen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, also Ungleichungen der Form

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq a_0\,,$$

   mit $a_i \in \mathbb{Z}$, eine ganzzahlige Lösung besitzt, also eine ganzzahlige Belegung für die Variablen, so dass alle Ungleichungen der gegebenen Menge wahr sind.

   (a) Definieren Sie eine Sprache GP, die dem Ganzzahligen-Programmierungsproblem entspricht.

   (b) Zeigen Sie, dass GP NP-vollständig ist.
   (Hinweis: Verwenden Sie 3-SAT. Es kann hilfreich sein, die Variablenanzahl zu verdoppeln.)

3. **(10 Punkte)** Die Komplexitätsklassen $P = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(n^k)$ und $NP = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$ sind beide als unendliche Vereinigung definiert. Ob die beiden KLassen gleich sind, ist eine der großen Fragen der Informatik und Mathematik. Es wäre nun vorstellbar, dass $P = NP$ gilt, dass dies aber vollkommen bedeutungslos wäre. Es könnte nämlich sein, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Problem gibt, das man zwar nicht-deterministisch in Zeit $O(n^k)$ lösen kann, für das aber der beste deterministische Algorithmus zum Beispiel mindestens Zeit $\Theta(n^{(100^k)})$braucht.

   Zeigen Sie, dass so etwas nicht passieren kann. Beweisen Sie, dass wenn $P = NP$, dann existiert eine Konstante $b > 0$, sodass für alle k gilt, dass $\mathrm{NTIME}(n^k) \subset \mathrm{DTIME}(n^{b\cdot k})$.