1. **(10 Punkte)** Verwenden Sie das Pumping Lemma um zu zeigen, dass die folgenden beiden Sprachen nicht regulär sind:

   $$L_0 = \{\ a^K \mid K = 2^\ell \text{ für ein } \ell \in \mathbb{N}\ \} \qquad L_1 = \{\ w \in \{\,[,]\,\}^* \mid w \text{ ist korrekt geklammert }\}$$

   "Korrekt geklammert" bedeutet, dass in jedem Präfix u von w gilt, dass $\#_{[}(u) \geq \#_{]}(u)$.

2. **(10 Punkte)** Beweisen Sie das sogenannte *starke Pumpinglemma* für reguläre Sprachen:

   Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann gilt für sie folgende starke "Pumping-Eigenschaft": Es gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $uvw \in L$ mit $|v| = N$ es eine Unterteilung $v = xyz$ mit $|y| > 0$ gibt, sodass $uxy^izw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

   Vergessen Sie nicht, dass hier 0 auch als Element von $\mathbb{N}$ gilt.

3. **(15 Punkte)** In dieser Aufgabe geht es darum zu zeigen, dass die (starke) Pumping-Eigenschaft zwar eine notwendige Bedingung für die Regularität einer Sprache ist, aber keine hinreichende Bedingung. Betrachten wir folgende Sprache

   $$L = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält } aa \text{ als Teilstring oder } \#_a(w) = 2^\ell \text{ für irgendein } \ell \in \mathbb{N}\ \}\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass L die starke Pumping-Eigenschaft hat.

   (b) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

4. **(15 Punkte)** Für einen Bitstring $u \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir wieder mit $\langle u \rangle$ die natürliche Zahl, die durch u binär dargestellt wird; also $\langle u_{k-1}u_{k-2}\cdots u_1u_0\rangle = \sum_{0\leq i<k} u_i 2^i$.

   Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau alle binären Strings u beschreibt, sodass $\langle u \rangle \bmod 3 = 1$.

   Argumentieren Sie, warum Ihr Ausdruck tatsächlich die gewünschte Sprache beschreibt.

   Hinweis: Es könnte sinnvoll sein, zuerst einen DEA zu konstruieren und daraus den regulären Ausdruck.

5. **(10 Punkte)** Geben Sie einen NKA an, der die Sprache L_1 aus Aufgabe 1 akzeptiert. Argumentieren Sie, warum Ihr NKA korrekt ist.