Theoretische Informatik (WS 2016)
Prof. Raimund Seidel
Aufgabenblatt 1 Abgabe: 4. Nov. zu Vorlesungsbeginn

---

1. **(3 Punkte)** Definieren wir eine Relation R auf einer Menge A als *antisymmetrisch,* wenn für alle $a, a' \in A$ gilt, $(a, a') \in R \Leftrightarrow (a', a) \notin R$.

   Warum ist das keine besonders sinnvolle Definition? Machen Sie einen alternativen, besseren Vorschlag.

2. **(3 Punkte)** Beweisen Sie folgende Aussage:

   Für zwei Mengen A und B existiert eine Injektion von A nach B genau dann, wenn es eine Surjektion von B nach A gibt.

3. **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass die auf Mächtigkeiten von Mengen definierte Relationen "$\leq$" und "$\geq$" jeweils transitiv sind.

4. **(3 Punkte)**

   Zeigen Sie, dass die auf Mächtigkeiten von Mengen definierte Relation "$=$" eine Äquivalenzrelation ist.

5. **(5 Punkte)** Unter *genau* welchen Voraussetzungen an die Mengen A und B gilt, dass $|B^A| \leq |A|$? Beweisen Sie Ihre Antworten.

6. **(5 Punkte)** Wir kennen folgende Formel für Binomialkoeffizienten: $\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k} = 2^n$

   Welche Voraussetzungen sind notwendig, damit für eine Menge A Folgendes gilt:

   $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} = 2^A$

   Beweisen Sie Ihre Antwort.

7. **(8 Punkte)** Zeigen Sie, dass die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist. Also:

   Wenn für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge S_i abzählbar ist, dann ist auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ abzählbar.

8. **(10 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass es *überabzählbar viele* Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$ gibt, die nicht im Bild von f sind, also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \neq A$.

9. **(10 Punkte extra)** Beweisen Sie folgende Aussage für zwei Mengen A und B:

   Es existieren eine Injecktion von A nach B und eine Injektion von B nach A genau dann, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.

   Hinweis: Nehmen Sie ohne Beschränkung der Allgmeinheit an, dass A und B disjunkt sind und betrachten Sie das in der Vorlesung besprochene Pfeilmodell für Funktionen.