Polynomialzeitreduktionen

Definition

Es seien $L, L' \in \Sigma^*$. Wir nennen L *polynomiell leichter* als L' bzw. L *polynomiell reduzierbar* auf L', wenn es eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit

1. $\forall w \in \Sigma^* : w \in L \Leftrightarrow f(w) \in L'$,
2. f ist in polynomieller Zeit berechenbar.

Wir schreiben $L \preccurlyeq_P L'$.

Polynomialzeitreduktionen

Lemma

Es seien $L, L' \in \Sigma^*$. *Dann gilt*

$$L \preccurlyeq_P L' \text{ und } L' \in \mathrm{P} \Rightarrow L \in \mathrm{P}.$$

Die Aussage ist auch richtig, wenn man P *durch* NP *ersetzt.*

Polynomialzeitreduktionen

Lemma

Es seien $L, L' \in \Sigma^*$. *Dann gilt*

$$L \preccurlyeq_P L' \text{ und } L' \in \mathrm{P} \Rightarrow L \in \mathrm{P}.$$

Die Aussage ist auch richtig, wenn man P *durch* NP *ersetzt.*

Beweis.

- $L \preccurlyeq_P L'$: Es gibt TM F, die $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet mit
  $w \in L \Leftrightarrow f(w) \in L'$, Laufzeit $O(n^k)$.
- $L' \in \mathrm{P}$: Es gibt (det.) TM M', die L' entscheidet, Laufzeit $O(n^l)$.
- Wir bauen eine (det.) TM M für L (Eingabe w):
  1) Berechne $f(w)$ mit F.
  2) Teste mit M' ob $f(w) \in L'$ ist.
- M entscheidet L, Laufzeit: $O(n^k) + O(|f(w)|^l) \in O(n^{kl})$ □

Polynomialzeitreduktionen

Lemma (Transitivität)

Es seien $L, L', L'' \in \Sigma^*$. *Dann gilt*

$$L \preccurlyeq_P L' \text{ und } L' \preccurlyeq_P L'' \Rightarrow L \preccurlyeq_P L''.$$

Beweis.

Vergleiche Übungsblatt 8, Aufgabe 2 und voriges Lemma. □

NP-schwer – NP-vollständig

Definition

1. Eine Sprache S heiße NP-*schwer*, wenn für alle $L \in \mathrm{NP}$ gilt $L \preccurlyeq_P S$.
2. Eine Sprache S heiße NP-*vollständig*, wenn
   1. S NP-*schwer* ist und
   2. $S \in \mathrm{NP}$ gilt.

NP-schwer – NP-vollständig

Definition

1. Eine Sprache S heiße NP-*schwer*, wenn für alle $L \in \mathrm{NP}$ gilt $L \preccurlyeq_P S$.
2. Eine Sprache S heiße NP-*vollständig*, wenn
   1. S NP-*schwer* ist und
   2. $S \in \mathrm{NP}$ gilt.

Satz

Es sei $S \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$S \text{ NP-}\textit{schwer/vollständig und } S \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$$

NP-schwer – NP-vollständig

Definition

1. Eine Sprache S heiße NP-*schwer*, wenn für alle $L \in \mathrm{NP}$ gilt $L \preccurlyeq_P S$.
2. Eine Sprache S heiße NP-*vollständig*, wenn
   1. S NP-*schwer* ist und
   2. $S \in \mathrm{NP}$ gilt.

Satz

Es sei $S \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$S \text{ NP-}\textit{schwer/vollständig und } S \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$$

Beweis.

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$: ✓
2. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$:
   - $L \in \mathrm{NP}$ beliebig
   - S NP-schwer $\Rightarrow L \preccurlyeq_P S$
   - $S \in \mathrm{P} \Rightarrow L \in P$ (vgl. 1. Lemma)

□

NP-schwer – NP-vollständig

Andere Formulierung des Satzes

$$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP} \text{ und } S \text{ NP-vollständig} \Rightarrow S \notin \mathrm{P}$$

NP-schwer – NP-vollständig

Wie zeigt man, dass eine Sprache NP-schwer ist?

- direkt oder
- mit dem folgenden Lemma:

Lemma

Es seien $L, S \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$L \text{ NP-schwer und } L \preccurlyeq_P S \Rightarrow S \text{ NP-schwer.}$$

NP-schwer – NP-vollständig

Wie zeigt man, dass eine Sprache NP-schwer ist?

- direkt oder
- mit dem folgenden Lemma:

Lemma

Es seien $L, S \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$L \text{ NP-schwer und } L \preccurlyeq_P S \Rightarrow S \text{ NP-schwer.}$$

Beweis.

- $L' \in$ NP beliebig
- L NP-schwer $\Rightarrow L' \preccurlyeq_P L$
- zusammen mit $L \preccurlyeq_P S \Rightarrow L' \preccurlyeq_P S$ (Transitivität von $\preccurlyeq_P$) $\square$