Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$

ist nicht entscheidbar.

Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$

ist nicht entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Beispiele:

$\{ w \mid \varepsilon \in L(M_w) \}$

$\{ w \mid L(M_w) = \emptyset \}$

$\{ w \mid L(M_w)$ ist endlich $\}$

$\{ w \mid L(M_w)$ ist kontextfrei $\}$

alle nicht entscheidbar.

Satz von Rice:

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$ ist **nicht** entscheidbar.

Beweis: o.B.d.A. sei $\emptyset \notin \mathcal{S}$ sowie
$L \in \mathcal{S}$ und M eine TM mit $L(M) = L$

Wollen zeigen: $UNIV \preceq C(\mathcal{S})$

Für $w\$x$ beschreibe $f(w\$x)$ folgende TM N:

Eingabe y
1. Lasse M_w auf x laufen
2. Lasse M auf y laufen

Wenn M_w das x akzeptiert, dann verhält sich N genauso wie M, also $f(w\$x) \in C(\mathcal{S})$

Wenn M_w das x nicht akzeptiert, dann akzeptiert N nichts, also die leere Sprache $\emptyset$, also gilt $f(w\$x) \notin C(\mathcal{S})$

Post'sche Korrespondenzproblem

Reservoir von k Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich oben und <u>unten</u> das gleiche Wort ergibt ?

1	011	10	011
101	11	00	11

Post'sche Korrespondenzproblem PCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1,\cdots,k\}^*$ mit $X[I] = Y[I]$

$I = (i_1,i_2,\cdots,i_n)$

$X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$

$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Beweis:

UNIV $\preceq$ WORT $\preceq$ MPCP $\preceq$ PCP,

also

UNIV $\preceq$ PCP .

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

S_X kontextfrei, denn generiert durch Grammatik mit Regeln

$S \to i\ S\ x_i \qquad 1 \leq i \leq k$

$S \to i\ \$\ x_i \qquad 1 \leq i \leq k$

analog S_Y kontextfrei.

S_X und S_Y sind sogar **deterministisch** kontextfrei.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: (k , $((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))$) Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ \ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$
$S_Y = \{ \ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

$S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ bedeutet es gibt ein $I\in\{1,\cdots,k\}^+$ mit

$I^R\$X[I] = I^R\$Y[I]$, also $X[I] = Y[I]$,

also entscheiden, ob $S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ würde das PCP lösen.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2)$ *ist endlich*? ist unentscheidbar.

Beweis: (k , $((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))$) Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ \ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$
$S_Y = \{ \ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$

PCP hat keine Lösung $\Rightarrow$ $S_X \cap S_Y = \emptyset$, also $S_X \cap S_Y$ endlich

PCP hat Lösung I $\Rightarrow$ I^n ist Lösung für jedes $n>0$
$\Rightarrow$ $(I^n)^R\$X[I^n] = (I^n)^R\$Y[I^n]$ jedes $n>0$
$\Rightarrow$ $S_X \cap S_Y$ ist **nicht** endlich.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \subset L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: (k , $((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))$) Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ \ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$
$S_Y = \{ \ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X
G_2 kontextfreie Grammatik für $\overline{S_Y}$
(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)

$L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow \underbrace{S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \textbf{PCP unlösbar}}_{\textit{unentscheidbar}}$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) = L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: (k , $((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))$) Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ \ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$
$S_Y = \{ \ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X
G_2 kontextfreie Grammatik für $\overline{S_Y}$
(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)
G kontextfreie Grammatik für $S_X \cup S_Y$

$L(G_2) = L(G) \Leftrightarrow L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\textbf{PCP unlösbar}}_{\textit{unentscheidbar}}$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2)$ *ist kontextfrei*? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $L_X = \{ I^R\#K\$K^R\#X[I] \mid I,K \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$
$S_Y = \{ J^R\#J\$H^R\#Y[H] \mid J,H \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für L_X
G_2 kontextfreie Grammatik für L_Y

PCP unlösbar $\Rightarrow L_X \cap L_Y = \emptyset \Rightarrow L_X \cap L_Y$ **ist kontextfrei**

PCP lösbar $\Rightarrow L_X \cap L_Y$ **enthält Worte der Form** $(I^n)^R\#I^n\$(I^n)^R\#X[I^n]$
für alle n>0
$\Rightarrow L_X \cap L_Y$ **ist nicht kontextfrei**