Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Bsp: kfG für geklammerte arithmetische Ausdrücke über Binärzahlen und Variablennamen über $\{a,b\}^*$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \rightarrow aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

$11*(a+1) \in L(G)$ $\quad (a+b)(a+1) \notin L(G)$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \rightarrow aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

Bsp: Ableitung von $11*(a+1)$

$\underline{E} \Rightarrow E*\underline{E} \Rightarrow E*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}*(E+E)$
$\Rightarrow K*(\underline{E}+E) \Rightarrow K*(W+\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}*(W+K)$
$\Rightarrow 11*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11*(\underline{W}+1)$
$\Rightarrow 11*(a+1)$

Ableitungsbaum:

geordneter Baum mit Knotenbeschriftung aus $\Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$

Knoten N beschriftet mit $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ hat keine Kinder

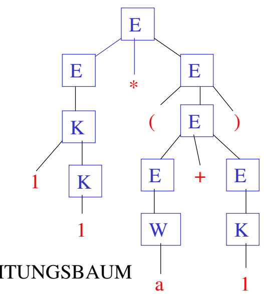
Knoten N beschriftet mit $y \in V$ und mit Kindern $N_1,\cdots,N_k$ beschriftet mit $x_1,\cdots,x_k$
nur möglich, wenn $y \rightarrow x_1x_2\cdots x_k$ eine Produktionsregel

Wurzelbeschriftung A und Blätterbeschriftung $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ genau dann möglich wenn $A \Rightarrow^* \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \rightarrow E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \rightarrow aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

Bsp: Ableitung von $11*(a+1)$

$\underline{E} \Rightarrow E*\underline{E} \Rightarrow E*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}*(E+E)$
$\Rightarrow K*(\underline{E}+E) \Rightarrow K*(W+\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}*(W+K)$
$\Rightarrow 11*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11*(\underline{W}+1)$
$\Rightarrow 11*(a+1)$



ABLEITUNGSBAUM

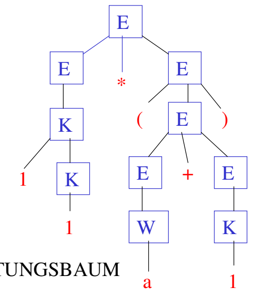
$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E{+}E \mid E{*}E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

Bsp: Ableitung von 11*(a+1)

$\underline{E} \Rightarrow E{*}\underline{E} \Rightarrow E{*}(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}{*}(E{+}E)$
$\Rightarrow K{*}(\underline{E}{+}E) \Rightarrow K{*}(W{+}\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}{*}(W{+}K) \Rightarrow 1\underline{K}{*}(W{+}K)$
$\Rightarrow 11{*}(W{+}\underline{K}) \Rightarrow 11{*}(\underline{W}{+}1)$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}1)$

Bsp: Linksableitung von 11*(a+1)

$\underline{E} \Rightarrow \underline{E}{*}E \Rightarrow \underline{K}{*}E \Rightarrow 1\underline{K}{*}E$
$\Rightarrow 10{*}\underline{E} \Rightarrow 10{*}(\underline{E})$
$\Rightarrow 10{*}(\underline{E}{+}E) \Rightarrow 10{*}(\underline{W}{+}E)$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}\underline{E}) \Rightarrow 11{*}(a{+}\underline{K})$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}1)$



ABLEITUNGSBAUM

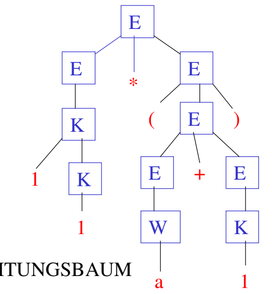
$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E{+}E \mid E{*}E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

Bsp: Ableitung von 11*(a+1)

$\underline{E} \Rightarrow E{*}\underline{E} \Rightarrow E{*}(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}{*}(E{+}E)$
$\Rightarrow K{*}(\underline{E}{+}E) \Rightarrow K{*}(W{+}\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}{*}(W{+}K) \Rightarrow 1\underline{K}{*}(W{+}K)$
$\Rightarrow 11{*}(W{+}\underline{K}) \Rightarrow 11{*}(\underline{W}{+}1)$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}1)$

Bsp: Linksableitung von 11*(a+1)

$\underline{E} \Rightarrow \underline{E}{*}E \Rightarrow \underline{K}{*}E \Rightarrow 1\underline{K}{*}E$
$\Rightarrow 10{*}\underline{E} \Rightarrow 10{*}(\underline{E})$
$\Rightarrow 10{*}(\underline{E}{+}E) \Rightarrow 10{*}(\underline{W}{+}E)$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}\underline{E}) \Rightarrow 11{*}(a{+}\underline{K})$
$\Rightarrow 11{*}(a{+}1)$



ABLEITUNGSBAUM

Linksableitung entspricht Präordertraversierung des Ableitungsbaums

Lemma: $G = (\Sigma,V,S,P)$ kontextfreie Grammatik, $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$

$\exists$ Ableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Linksableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Ableitungsbaum mit Wurzelbeschriftung S und mit α als Blätterbeschriftung

Satz: Die kontextfreien Sprachen sind genau die NKA-Sprachen. Also
$L=L(G)$ für irgendeine kfG $G = (\Sigma,V,S,P)$
$\Leftrightarrow$ $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA $M=(\Sigma,\Gamma,€,Q,s,\Delta)$

Satz: Die kontextfreien Sprachen sind genau die NKA-Sprachen. Also
$L=L(G)$ für irgendeine kfG $G = (\Sigma,V,S,P)$
$\Leftrightarrow$ $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA $M=(\Sigma,\Gamma,€,Q,s,\Delta)$

Beweis: 1) "$\Rightarrow$" Gegeben Grammatik G, baue NKA M, dessen akzeptierende Berechnungen Linksableitungen in G entsprechen

$\Gamma = V\cup\Sigma$ $\quad € = S$ $\quad Q=\{s\}$

$\Delta = \{ (s,A,\varepsilon,\alpha^R ,s) \mid A\to\alpha \text{ in } P\} \cup \{ (s,a,a,\varepsilon,s) \mid a\in\Sigma \}$

Satz: Die kontextfreien Sprachen sind genau die NKA-Sprachen. Also
$L=L(G)$ für irgendeine kfG $G = (\Sigma,V,S,P)$
$\Leftrightarrow$ $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA $M=(\Sigma,\Gamma,€,Q,s,\Delta)$

Beweis: 2) "$\Leftarrow$" Gegeben NKA $M=(\Sigma,\Gamma,€,Q,s,\Delta)$, konstruiere kf Grammatik G, sodass Linksableitungen in G den akzeptierende Berechnungen von M entsprechen. O.B.d.A. gilt $|Q|=1$

$V = \Gamma$ $\quad S = €$ $\quad Q=\{s\}$

$P = \{ A\to a\alpha^R \mid (s,A,a,\alpha,s) \in \Delta \}$ $\quad (a \in \Sigma\cup\{\varepsilon\})$

Chomsky-Normalform (für kf Grammatiken)

alle Produktionen von Form $A\to a$ oder $A\to BC$ $(A,B,C\in V,\ a\in\Sigma)$

Chomsky-Normalform (für kf Grammatiken)

alle Produktionen von Form $A\to a$ oder $A\to BC$ $(A,B,C\in V,\ a\in\Sigma)$

Greibach-Normalform (für kf Grammatiken)

alle Produktionen von Form $A\to aU$ $(U\in V^*,\ a\in\Sigma)$

$S\to\varepsilon$ auch zugelassen, aber dann S auf keiner rechten Produktionsseite

Chomsky-Normalform (für kf Grammatiken)

alle Produktionen von Form $A \to a$ oder $A \to BC$ ($A,B,C \in V$, $a \in \Sigma$)

Greibach-Normalform (für kf Grammatiken)

alle Produktionen von Form $A \to aU$ ($U \in V^*$, $a \in \Sigma$)

$S \to \varepsilon$ auch zugelassen, aber dann S auf keiner rechten Produktionsseite

Satz: $L = L(G)$ für kf Grammatik G

$\Leftrightarrow \exists$ kf Grammatik G in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$

$\Leftrightarrow \exists$ kf Grammatik G in Greibach-Normalform mit $L(G) = L$