Satz 0: Wird eine Sprache $L$ von einem NKA $M$ akzeptiert, dann wird $L$ auch von einem **einfachen** NKA $M'$ durch gleichzeitigem leerem Keller und Endzustand akzeptiert, bei dem dazu noch alle Regeln in $\Delta' \subset Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \times Q$ eine der folgenden drei Formen haben:

( p , A , a , ε , q ) ( "pop the stack" )

( p , A , a , B , q ) ( ändere die Kellerspitze )

( p , A , a , A'B , q ) ( "push B" )

Satz: Wird eine Sprache $L$ von einem NKA $M$ akzeptiert, dann wird $L$ auch von einem im Sinne von Satz 0 einfachen NKA $M'$ akzeptiert wobei $M'$ nur **einen Zustand** besitzt.

Beachte: Man kann $M'$ auch als NKA **ohne Zustand** auffassen.



## Pumping Lemma für NKA Sprachen:

$L$ NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$ mit $|z| \geq N$ : $\exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx|>0$ : $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$

**Beweisidee:**
Sei $M$ ein einfacher, 1-Zustand NKA für $L$. Sei $z$ ein hinreichend langes Wort in $L$. Betrachte eine kürzeste akzeptierende Berechnung für $z$.

**Fall 1:** Der Keller wird nie groß. Dann müssen sich Kellerinhalte wiederholen, und das Teilwort $v \neq \varepsilon$ (!), das von einer Wiederholung zur nächsten führt, könnte beliebig oft in wiederholt werden. (nehme dann $x=\varepsilon$)

**Fall 2:** Der Keller wird groß. Sei $W$ der größte Keller, der in der Berechnung auftritt. $W$ muss dann die Form $UAU'AU''$ haben, wobei die beiden $A$'s aus dem gleichen Grund auf den Keller gekommen sind. Sei $v$ Teilwort von $z$, das zum Aufbau von $AU'$ geführt hat und $x$ das Teilwort, das zum Abbau von $AU'$ führt. Wegen Minimalität der Berechnung gilt $|vx|>0$. Beide Worte könnten innerhalb von $z$ $i$-mal wiederholt werden (der Aufbau bzw. Abbau von $AU'$ würde entsprechend $i$-mal wiederholt werden).



Definition: Deterministischer Kellerautomat (DKA)

$M$ ist ein DKA, wenn in jeder "Situation" höchstens eine Rechenschrittregel anwendbar ist, also:

$(A,p,a,q,U) \in \Delta$ und $(A,p,a,q',U') \in \Delta \Rightarrow (q,U)=(q',U')$

und $(A,p,\varepsilon,q,U) \in \Delta \Rightarrow \nexists (a,q',U')$ mit $(A,p,a,q,U') \in \Delta$

$L$ ist eine DKA Sprache, wenn es einen DKA $M$ gibt mit $L(M)=L$.
(Also Akzeptanz durch Endzustand)

**Achtung:** Es gibt DKA-Sprachen $L$ mit $L \neq L_\varepsilon(M)$ für alle DKA $M$ (die mit Endzustand akzeptieren). Bsp: $L=\{a\}^*$



Lemma: Die Sprache

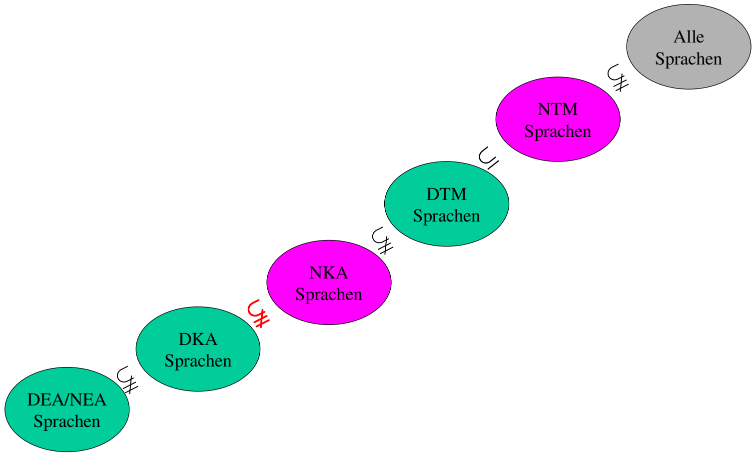
$L = \{ a^nb^n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ a^nb^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

is eine NKA-Sprachen, aber keine DKA-Sprache.

**Beweisidee:** Betrachte DKA $M$, der $L$ angeblich akzeptiert.

Überlege, dass nach Abarbeitung von $a^nb^n$ der Keller nicht beliebig groß sein kann, sondern nur konstant groß (sonst könnten Teile von $a^nb^n$ beliebig oft wiederholt werden)

Also gibt es zwei verschiedene $n'$ und $n''$, sodass der Keller nach Abarbeitung von $a^{n'}b^{n'}$ und $a^{n''}b^{n''}$ gleich aussieht. Aber dann würde $M$ auch das Wort $a^{n'}b^{n'+n''} \notin L$ akzeptieren.






Satz: NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) sind unter Komplementbildung **nicht** abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine NKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L nicht unbedingt eine NKA Sprache.

Satz: DKA-Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine DKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L auf jeden Fall eine DKA Sprache.

Kor: DKA-Sprachen sind eine echte Teilmenge der NKA-Sprachen.



Satz: DKA-Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine DKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L auf jeden Fall eine DKA Sprache.

Beweis:
Idee: Baue aus DKA M für L, einen DKA M’ für das Komplement von L
(durch Vertauschung von End- und Nicht-Endzuständen).

Details: 1) fehlende Übergänge
2) Endlosschleifen von ε-Übergängen
3) Folgen von ε-Übergängen durch End- und Nicht-Endzuständen nach Konsum der gesamten Eingabe.