



Anmerkung: Bei der Berechnung des Prozentsatzes der von Ihnen insgesamt erreichten von möglichen Punkte geht die Punktezahl aus diesem Übungsblatt nur in den Zähler ein.

1. (25 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit Kantengewichten. Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Wenn alle Kantengewichte in G verschieden sind, dann ist der minimale aufspannende Baum von G eindeutig.
- Wenn der minimale aufspannende Baum von G eindeutig ist, dann sind alle Kantengewichte von G verschieden.
- Wenn die Kante in E mit kleinstem Gewicht eindeutig ist, dann ist sie auf jeden Fall im minimalen aufspannenden Baum von G .
- Wenn die Kante in E mit größtem Gewicht eindeutig ist, dann ist sie auf keinen Fall im minimalen aufspannenden Baum von G .
- Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: wenn unter den Kanten inzident zu v die leichteste Kante eindeutig ist, dann ist diese Kante auf jeden Fall im minimalen aufspannenden Baum von G .

2. (15 Punkte)

Es sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Jeder Punkt ist als cartesisches Koordinatenpaar gegeben, also p ist gegeben als $(p.x, p.y)$.

Ein *euklidischer minimaler Spannbaum* für P ergibt sich als minimaler aufspannender Baum folgenden gewichteten Graphs G_P :

G_P ist der vollständige Graph mit Knotenmenge P (also, jedes Punktepaar p, q von P ergibt eine Kante). Jede Kante $[p, q]$ bekommt als Gewicht die euklidische Distanz zwischen p und q , also

$$\sqrt{(p.x - q.x)^2 + (p.y - q.y)^2}.$$

Nehmen wir im Folgenden an, dass alle Koordinaten ganze Zahlen sind. Die Kantengewichte sind dann Wurzeln von nicht-negativen ganzen Zahlen.

Herr Schlaue möchte für so einen Fall einen euklidischen minimalen Spannbaum berechnen. Da das Berechnen von Wurzeln aber kompliziert ist und auch zu Ungenauigkeiten führen kann, lässt Herr Schlaue die Wurzeln in seinem Algorithmus einfach weg. Also, für jede Kante $[p, q]$ verwendet er das Gewicht

$$(p.x - q.x)^2 + (p.y - q.y)^2.$$

Wie unterscheidet sich der Baum, den er so berechnet, vom echten euklidischen minimalen Spannbaum für P ?

Begründen Sie Ihre Antwort.